Solution

Par Michel Criton

HS3710 – Examinons tout d'abord la parité des chiffres successifs obtenus à partir d'un nombre de quatre chiffres comportant au moins un chiffre impair (« p » pour « pair », « i » pour « impair ») :

0	pppi
1	ppii
2	piii
3	iiii
4	iiip
5	iipi
6	ipip
7	pipi
8	ipii
9	piip
10	iipp
11	ippi
12	ppip
13	pipp
14	ippp
15	pppi

On constate que la séquence de départ, p p p i, ne réapparaît qu'après quinze étapes. D'autre part, toutes les séquences possibles, excepté p p p p, apparaissent dans cette suite. Ceci implique que le nombre d'étapes est un multiple de 15 pour tout nombre de quatre chiffres comportant au moins un chiffre impair.
Montrons maintenant que ces quinze étapes ne peuvent être atteintes qu'avec des nombres composés uniquement de 0 et de 5.
Supposons que l'on parte du nombre qui s'écrit 1 000a + 100b + 10c + d.
On obtient successivement (modulo 10) :

$a+d$	$a+b+d$	$a+b+c+d$	$a+b+c+2d$	$2a+b+c+3d$	$3a+2b+c+4d$	$4a+3b+2c+5d$
1	2	3	4	5	6	7

$5a+4b+3c+7d$	$7a+5b+4c+10d$	$10a+7b+5c+14d$	$14a+10b+7c+19d$
8	9	10	11

$19a+14b+10c+26d$	$26a+19b+14c+36d$	$36a+26b+19c+50d$
12	13	14

$50a+36b+26c+69d$
15

Supposons qu'à la 15^{e} étape, on obtienne le nombre de départ. On a alors le système suivant :

$9a + 4b + 6d = a \pmod{10}$,
$6a + 9b + 4c + 6d = b \pmod{10}$,
$6a + 6b + 9c = c \pmod{10}$,
$6b + 6c + 9d = d \pmod{10}$,
$4a + 2b + 3d = 0 \pmod{5}$,
$3a + 4b + 2c + 3d = 0 \pmod{5}$,
$3a + 3b + 4c = 0 \pmod{5}$,
$3a + 3b + 4d = 0 \pmod{5}$.

Ce système a pour solution $a = b = c = d = 0 \pmod{5}$.

Sur les seize nombres de quatre chiffres s'écrivant à l'aide des seuls chiffres 0 ou 5, huit sont des solutions du problème : **5 555, 5 550, 5 505, 5 055, 5 500, 5 050, 5 005, 5 000.**

Voici les différentes boucles de cet algorithme :

0000	1 élément,
0002	312 éléments,
0026	312 éléments,
0001	1 560 éléments,
0012	1 560 éléments (contient 1 990),
0013	1 560 éléments,
0014	1 560 éléments,
0015	1 560 éléments,
0113	1 560 éléments,
0005	15 éléments, dont 8 ne commencent pas par un zéro.
TOTAL	10 000 nombres de quatre chiffres.