Solution des Problèmes HS3908, HS3909 et HS3910 du Thématique *Tangente* 39, *Mathématiques discrètes et Combinatoire*.

HS3908 – Quels que soient les entiers a et b, $(-1)^{|a-b|} = (-1)^{a-b}$.
Si a_i *et* b_i désignent les $i^{\text{èmes}}$ termes des lignes ou colonnes que l'on compare, on a :

$$\prod_{I=1}^{9}\left(-1\right)^{|a_i-b_i|}=\prod_{I=1}^{9}\left(-1\right)^{a_i-b_i}=\left(-1\right)^{0}=1.$$

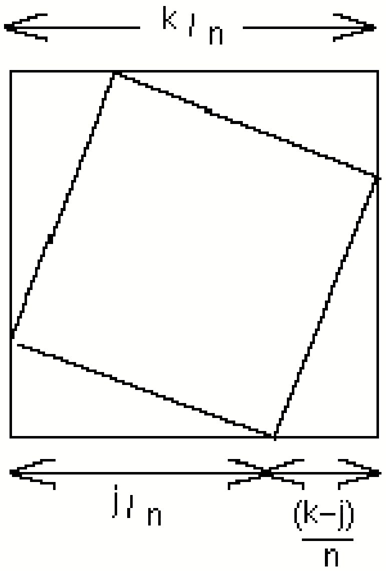
On en déduit que la somme des valeurs absolues des différences est toujours paire.

HS3909 – 1, 1, 3, 8, 27, 106, 483, 2 498, 14 487, 93 106.
On obtient les nombres de cette suite de la façon suivante. On construit le tableau ci-dessous. Chaque ligne de rang pair se construit en écrivant dans chaque case la somme des nombres écrits à gauche de cette case sur la ligne immédiatement supérieure, et chaque ligne de rang impair à partir de la troisième se construit en écrivant dans chaque case la somme des nombres écrits à droite de cette case sur la ligne immédiatement supérieure.

2	2	0				
0	2	4	**4**			
10	10	8	4	0		
0	10	20	28	32	**32**	
122	122	112	92	64	32	0

Les nombres a_n apparaissant en rouge dans le tableau : 2, 4, 10, 32, 122... sont les nombres de nombres ondulés formés avec les chiffres de 1 à n pour $n > 1$. Si l'on utilise le zéro (sauf en première position), on obtient la suite b_n définie pour $n > 2$ par $b_n = a_n - a_{n-1} / 2$.

HS3910 –



Prenons comme unité d'aire l'aire du grand carré, et désignons par n le nombre de subdivisions du côté du grand carré (ici, n = 15 000). Chaque carré « d'aplomb » par rapport au quadrillage de côté k / n permet de construire k carrés plus ou moins « obliques », le carré d'aplomb compris (voir figure ci-dessus). La somme des aires de ces k carrés est alors égales à

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{k-1}\left(j^2+(k-j)^2\right) = \frac{k\left(2k^2+1\right)}{3n^2}.$$

Le nombre total de carrés « d'aplomb » de côté k / n est égal à $(n - k + 1)^2$. On en déduit le nombre total de carrés :

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(n-k+1\right)^2 = \frac{n\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)}{12}.$$

La somme des aires de tous ces carrés est égale à :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\left(n-k+1\right)^2 k\left(2k^2+1\right)}{3n^2} = \frac{\left(n+1\right)^2\left(2n^3+8n^2+17n+18\right)}{180n}.$$

On obtient ainsi l'aire moyenne d'un carré : $\dfrac{2n^3+8n^2+17n+18}{15n^2\left(n+2\right)}$ m^2.

Pour $n = 15\,000$, et en tenant compte du fait que l'aire du grand carré est égale à 225 m^2, on arrive à une aire moyenne de $\dfrac{1\,519\,155\,057\,379\,050}{50\,631\,750\,000\,000} \simeq 30{,}004006 \text{ m}^2$.

L'aire moyenne d'un carré est donc égale à environ **30 m^2**.